УДК 519.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В СИЛЬНОСВЯЗНЫХ НАПРАВЛЕННЫХ ГРАФАХ

А.С. Шевченко

В работе [1] рассматривается класс задач, решение которых сводится к нахождению минимума некоторой величины, именуемой потенциалом перестановки. Там же предлагается соответствующий алгоритм, недостаток которого является необходимость нахождения контуров графа, что является довольно сложной задачей для графов с большим числом вершин и дуг, а именно с таким случаем, как правило, приходится иметь дело на практике. Ниже предлагается алгоритм нахождения минимума потенциала перестановки основанный на некоторых преобразованиях матрицы смежности графа, программная реализация которого существенно проще.

Пусть $G(X,U)$ ориентированный граф некоторого процесса, а $A=(a_{ij})$ − матрица смежности этого графа $(i=1...n,\quad j=1...n)$. Если вершины графа перенумеровать и расположить в одну линию, то последовательность номеров вершин будет представлять собой некоторую перестановку $(i_1,i_2,...,i_n)$, потенциал которой, согласно [1], определяется следующим образом

$$V(i_1,i_2,...,i_n)=\sum_{l=2}^{n}\sum_{k=1}^{l-1}a_{i_l,i_k}$$

Покажем, как можно найти минимум потенциала перестановки, оперируя только матрицей смежности.

Определим три преобразования матрицы смежности L_1, L_2 и L_3 следующим образом.

Если найдутся такие j и $i>j+1$, что выполняется условие $\sum_{k=j+1}^{i}a_{kj}\ge\sum_{l=j+1}^{i}a_{jl}$, то матрица L_1A получается из матрицы A путём перестановки индекса j за индекс i. Заметим, что перестановка индексов означает и соответствующую перестановку элементов матрицы смежности, так как она соответствует перестановке вершины j за вершину i в рассматриваемом графе. Очевидно, в этом случае потенциал перестановки матрицы L_1A будет меньше потенциала перестановки матрицы A на величину $\Delta=\sum_{k=j+1}^{i}a_{kj}-\sum_{l=j+1}^{i}a_{jl}$.

Если найдутся такие j и i, что $\sum_{k=j+1}^{i}a_{kj}<\sum_{l=j+1}^{i}a_{jl}$, но $\sum_{k=j}^{i-1}a_{ik}>\sum_{l=j}^{i-1}a_{li}$ или $\sum_{k=j}^{i-1}a_{ik}=\sum_{l=j}^{i-1}a_{li}$, то матрица L_1A получается из матрицы A путём перестановки индекса i на место перед индексом j. В этом случае, потенциал перестановки уменьшится на величину $\Delta=\sum_{k=j}^{i-1}a_{ik}-\sum_{l=j}^{i-1}a_{li}$.

Матрица L_2A получается из матрицы A следующим образом.

Пусть для $a_{i_{k+m},i_k}=1,\ a_{i_k,i_{k+m}}=0$ выполняется условие $\sum_{l=k+1}^{k+m}a_{i_ki_l}>\sum_{l=k+1}^{k+m}a_{i_li_k}$, причём для всех $\beta<m\quad a_{i_ki_{k+\beta}}=1,\ a_{i_{k+\beta}i_{k+m}}=0$, а для всех $\beta<\alpha<m\ a_{i_{k+\beta}i_{k+\alpha}}=1,\ a_{i_{k+\alpha}i_{k+m}}=0$, тогда L_2A получается из матрицы A переносом индексов $i_{k+\beta}$, $i_{k+\alpha}$ в том порядке, в котором они стоят, за индекс i_{k+m}. При этом потенциал перестановки уменьшится.

Если же имеются элементы $a_{i_{k+...}i_{k+m}} = 1$, то надо найти такое m' $(n \geq m' > m)$, для которого предыдущие условия выполняются, и перенести соответствующие индексы за индекс $i_{k+m'}$. В этом случае, очевидно, потенциал перестановки не изменится, но это может позволить выполнить одно из преобразований, уменьшающих потенциал перестановки на следующем шаге.

Матрица $L_3 A$ получается из матрицы A следующим образом.

Пусть $a_{ij} = 1,\ при\ i > j$. Если найдутся такие $j, j+1, ..., j+p$, для которых выполняется условие $\sum_{k=j+p+1}^{n} \sum_{l=j}^{j+p} a_{kl} \geq \sum_{k=j}^{j+p} \sum_{l=j+p+1}^{n} a_{kl}$, то матрица $L_3 A$ получается перестановкой индексов $j, j+1, ..., j+p$ за индекс n. При этом потенциал перестановки либо уменьшится (при строгом неравенстве), либо останется неизменным.

Обозначим через S_1, S_2, S_3 множества матриц, к которым применимы преобразования L_1, L_2, L_3 соответственно. Возведение преобразования в целую степень, отличную от нуля, определим следующим образом

$$L_i^m A = L_i\left(L_i^{m-1} A\right),\ \text{если}\ L_i^{m-1} A \in S_i;\quad i = 1,2,3$$

Под нулевой степенью будем понимать тождественное преобразование, переводящее матрицу саму в себя. Наконец, если, начиная со степени $(\alpha - \beta)$, одно и то же преобразование применяется до степени α, причём $L_i^{\alpha} M = L_i^{\alpha-\beta} M$, то будем считать, что $L_i^{\alpha} M \notin S_i$.

Рассмотрим множество матриц, получающихся из исходной матрицы путём следующей последовательности действий. После каждого преобразования матрицы, последовательно, начиная с S_1, определяется множество, к которому она принадлежит, и первое же допустимое преобразование выполняется. В общем случае такие матрицы можно представить в следующем виде:

$$B = L_3^{p_k} L_2^{q_k} L_1^{m_k} ... L_3^{p_1} L_2^{q_1} L_1^{m_1} A,$$

где не все степени p_i, q_i, m_i равны нулю.

Степени преобразований в такой последовательности обладают следующими свойствами. Очевидно, преобразование L_1 выполняется до тех пор, пока это возможно. Если $L_1^{m-1} A \in S_1$, а $L_1^m A \notin S_1$, то m назовём максимально допустимой степенью преобразования L_1. Преобразования L_2 и L_3, напротив, выполняются минимальное число раз. Действительно, если после очередного преобразования L_2 получается матрица, принадлежащая множеству S_1, то следующим преобразованием должно быть L_1. Таким образом, коэффициент q_i является минимально возможной степенью преобразования L_2 на данном этапе. Аналогично и для преобразования L_3 коэффициент p_i является минимально возможной степенью преобразования.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема: Если $B = L_3^{p_k} L_2^{q_k} L_1^{m_k} ... L_3^{p_1} L_2^{q_1} L_1^{m_1} A$, причём $B \notin S_1,\ B \notin S_2,\ B \notin S_3$, а m_i – максимально допустимые степени, p_i, q_i – минимально возможные степени преобразований L_1, L_2, L_3, то матрица B имеет минимальную величину потенциала перестановки.

Доказательство. Предварительно надо заметить, что потенциал перестановки уменьшается только тогда, когда при перестановке вершин графа, расположенных в одну линию, число обратных дуг уменьшается.

Если под главной диагональю матрицы B нет элементов, отличных от нуля, то граф не имеет обратных связей и потенциал перестановки больше нельзя уменьшить в принципе. Если такие элементы имеются, то разобьем их на три подмножества G_1, G_2, G_3.

Элемент $b_{ij} \in G_1$ если найдётся единственное k $(j < k < i)$, для которого $b_{jk} = 1$.

Элемент $b_{ij} \in G_2$ если $b_{ij} = b_{ji}$.

Все остальные элементы будем относить к множеству G_3.

Если $b_{ij} \in G_1$, то дуга входит в элементарный контур, не пересекающийся ни с каким другим контуром (т.е. не имеющим ни одной общей дуги с другим контуром), а наименьшее число дуг, разрывающих такой контур, очевидно, равно единице. Следовательно, подмножество G_1 минимально.

Если $b_{ij} \in G_2$, то он представляет собой контур (i, j, i) и, следовательно, под главной диагональю будет присутствовать либо b_{ij}, либо b_{ji}, причём b_{ji} разрывает контуров не больше, чем b_{ij}, иначе бы $B \in S_3$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, подмножество G_2 также минимально.

Аналогично предыдущему, если $b_{ij} \in G_3$, то дуга (i, j) входит как минимум в один контур и никакая другая дуга не разрывает больше контуров. Следовательно, подмножество G_3 минимально.

Так как подмножества G_1, G_2, G_3 не пересекаются друг с другом, а их объединение представляет собой всё множество элементов, расположенных под главной диагональю матрицы, то мы имеем минимальное множество элементов, разрывающих все обратные дуги. Следовательно, никакой дальнейшей перестановкой вершин графа нельзя уменьшить число обратных связей, а это и означает, что потенциал перестановки матрицы смежности равен минимальному значению. Что и требовалось доказать.

Таким образом, предложенная последовательность преобразований матрицы смежности направленного графа даёт нам искомый алгоритм. Этот алгоритм легко программируется на любом алгоритмическом языке, т.к. оперирует лишь со стандартным типом данных – массивом.

Полученные результаты можно применить для нахождения минимального числа разрываемых потоков в сложной химико-технологической схеме, превращающего схему из замкнутой в разомкнутую, а также в тех случаях, когда процесс можно представить направленным графом, например, при расчётах электронных схем.

Библиографический список

1. Бурков, В.Н. Разрезы в сильносвязных графах и потенциалы перестановок / В.Н. Бурков, В.О. Гроппен / Автоматика и телемеханика. 1972. № 6. С. 23–27.
2. F.Harrary. Graph Theory. − Addison-Wesley Publishing Company. 1969.